第 2 节 等差、等比数列的基本性质（★★）

内容提要

诸多等差、等比数列问题，除了直接套用通项公式和前 n 项和公式解题外，若能灵活运用相关性质，往往可以降低计算量，下面总结了一些常用的性质.

1．等差数列的常用性质：（设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，其前 n 项和为 S_n）

①下标和性质：若 $m+n=r+s$，则 $a_m+a_n=a_r+a_s$，其中 $m,n,r,s\in\mathbf{N}^*$；特别地，若 $m+n=2r$，则 $a_m+a_n=2a_r$.

推论：$S_{2n-1}=\dfrac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{2}=(2n-1)a_n(n\in\mathbf{N}^*)$. 例如，$S_7=7a_4$，$S_9=9a_5$等.

②前 n 项和性质：$\{\dfrac{S_n}{n}\}$为等差数列，公差为 $\dfrac{d}{2}$（通过 $\dfrac{S_n}{n}=a_1+\dfrac{n-1}{2}d$ 易证）.

③片段和性质：S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，$\cdots$也构成等差数列，公差为 m^2d.

2．等比数列的常用性质：（设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，其前 n 项和为 S_n）

①下标和性质：若 $m+n=r+s$，则 $a_m\cdot a_n=a_r\cdot a_s$，其中 $m,n,r,s\in\mathbf{N}^*$；特别地，若 $m+n=2r$，则 $a_m\cdot a_n=a_r^2$.

②片段和性质：若 $q\neq-1$或 m 为奇数，则 S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，$\cdots$ 也构成等比数列，公比为 q^m.

注：上述等差数列与等比数列的片段和性质，代入前 n 项和公式即可证明，此处不再赘述.

典型例题

类型Ⅰ：等差数列性质的应用

【例 1】已知等差数列 $\{a_n\}$满足 $a_2+a_3+a_6+a_7=2$，则 $a_4+a_5=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）1　　（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）2

解析： 条件中的 a_2 和 a_7，a_3 和 a_6，以及要求的 a_4+a_5 下标之和都为 9，故可用下标和性质，

由题意，$a_2+a_3+a_6+a_7=(a_2+a_7)+(a_3+a_6)=2(a_4+a_5)=2$，所以 $a_4+a_5=1$.

答案： B

【例 2】已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_3+a_7=8$，则 $S_9=$（　　）

（A）24　　（B）36　　（C）48　　（D）72

解析： 由 $a_3+a_7=8$ 可快速求出 a_5，利用 $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$ 恰好可用 a_5 表示 S_9，

由题意，$a_3+a_7=2a_5=8$，所以 $a_5=4$，故 $S_9=9a_5=36$.

答案： B

【变式 1】设等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n，T_n，若 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{3n+5}{4n-2}$，则 $\dfrac{a_8}{b_8}=$______.

解析： 给出 S_n 与 T_n 的比值，可利用 $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$，$T_{2n-1}=(2n-1)b_n$ 转换成 a_n 与 b_n 的比值，

因为$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{3n+5}{4n-2}$，所以$\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{3(2n-1)+5}{4(2n-1)-2}=\dfrac{3n+1}{4n-3}$，

又$\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{(2n-1)a_n}{(2n-1)b_n}=\dfrac{a_n}{b_n}$，所以$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{3n+1}{4n-3}$，故$\dfrac{a_8}{b_8}=\dfrac{3\times 8+1}{4\times 8-3}=\dfrac{25}{29}$.

答案：$\dfrac{25}{29}$

【变式 2】设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_{4047}>0$，$S_{4046}<0$，则当$n=$______时，S_n最小.

解析：要判断何时S_n最小，只需判断$\{a_n\}$中哪些项为正，哪些项为负，S_{4047}可转换成a_{2024}，

由题意，$S_{4047}=4047a_{2024}>0$，所以$a_{2024}>0$ ①，

又$S_{4046}=\dfrac{4046(a_1+a_{4046})}{2}=2023(a_1+a_{4046})<0$，所以$a_1+a_{4046}<0$，为了把①用起来，将$a_1+a_{4046}$换成$a_{2023}+a_{2024}$，

因为$a_1+a_{4046}=a_{2023}+a_{2024}$，所以$a_{2023}+a_{2024}<0$，又$a_{2024}>0$，所以$a_{2023}<0$，故$d=a_{2024}-a_{2023}>0$，

所以$\{a_n\}$是递增数列，故$a_1<a_2<\cdots<a_{2023}<0<a_{2024}<a_{2025}<\cdots$，所以当$n=2023$时，$S_n$最小.

答案：2023

【反思】下标和性质（例 1）及其推论（例 2 及其变式）是等差数列最常用的一条性质，当出现等差数列中几项相加，或涉及S_n时，可考虑用下标和性质及其推论.

【例 3】在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，其前n项和为S_n，若$\dfrac{S_{10}}{10}-\dfrac{S_8}{8}=2$，则$S_{40}=$______.

解法 1：可将$\dfrac{S_{10}}{10}-\dfrac{S_8}{8}=2$翻译成$a_1$和$d$，求出公差$d$，进而代公式求$S_{40}$，

设$\{a_n\}$的公差为d，因为$\dfrac{S_{10}}{10}-\dfrac{S_8}{8}=2$，所以$\dfrac{10a_1+45d}{10}-\dfrac{8a_1+28d}{8}=2$，结合$a_1=1$解得：$d=2$，

故$S_{40}=40a_1+\dfrac{40\times 39}{2}d=40+1560=1600$.

解法 2：从$\dfrac{S_{10}}{10}-\dfrac{S_8}{8}=2$的结构特征联想到$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是等差数列，于是可先求出$\dfrac{S_n}{n}$，

因为$\{a_n\}$是等差数列，所以$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$也是等差数列，设$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$的公差为$d'$，则$\dfrac{S_{10}}{10}-\dfrac{S_8}{8}=2d'=2$，所以$d'=1$，

又$\dfrac{S_1}{1}=a_1=1$，所以$\dfrac{S_n}{n}=1+(n-1)\times 1=n$，从而$S_n=n^2$，故$S_{40}=40^2=1600$.

答案：1600

【反思】可以看到，相比之下解法 2 的计算量更小. 在等差数列问题中，若涉及到$\dfrac{S_n}{n}$这种结构的条件，可考虑用性质“$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$也是等差数列”来求解.

【例 4】已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_{20}=5$， $S_{60}=45$，则 $S_{40}=$____.

解析：观察发现 S_{20}， S_{60}， S_{40} 的下标都是 20 的整数倍，于是联想到等差数列的片段和性质，

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 S_{20}， $S_{40}-S_{20}$， $S_{60}-S_{40}$ 成等差数列，故 $2(S_{40}-S_{20})=S_{20}+S_{60}-S_{40}$，

将 $S_{20}=5$ 和 $S_{60}=45$ 代入可得： $2(S_{40}-5)=5+45-S_{40}$，解得： $S_{40}=20$.

答案：20

【变式 1】等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n=1$， $S_{3n}-S_n=5$，则 $S_{4n}=$（　　）

（A）10　　（B）20　　（C）30　　（D）15

解析：观察发现所给条件的下标都是 n 的整数倍，联想到等差数列的片段和性质，

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 S_n， $S_{2n}-S_n$， $S_{3n}-S_{2n}$， $S_{4n}-S_{3n}$ 也是等差数列，设其公差为 d，

由题意， $S_{3n}-S_n=(S_{3n}-S_{2n})+(S_{2n}-S_n)=(S_n+2d)+(S_n+d)=2S_n+3d=2+3d=5$，所以 $d=1$，

到此等差数列 S_n， $S_{2n}-S_n$， $S_{3n}-S_{2n}$， $S_{4n}-S_{3n}$ 的首项和公差就都知道了，求和即为 S_{4n}，

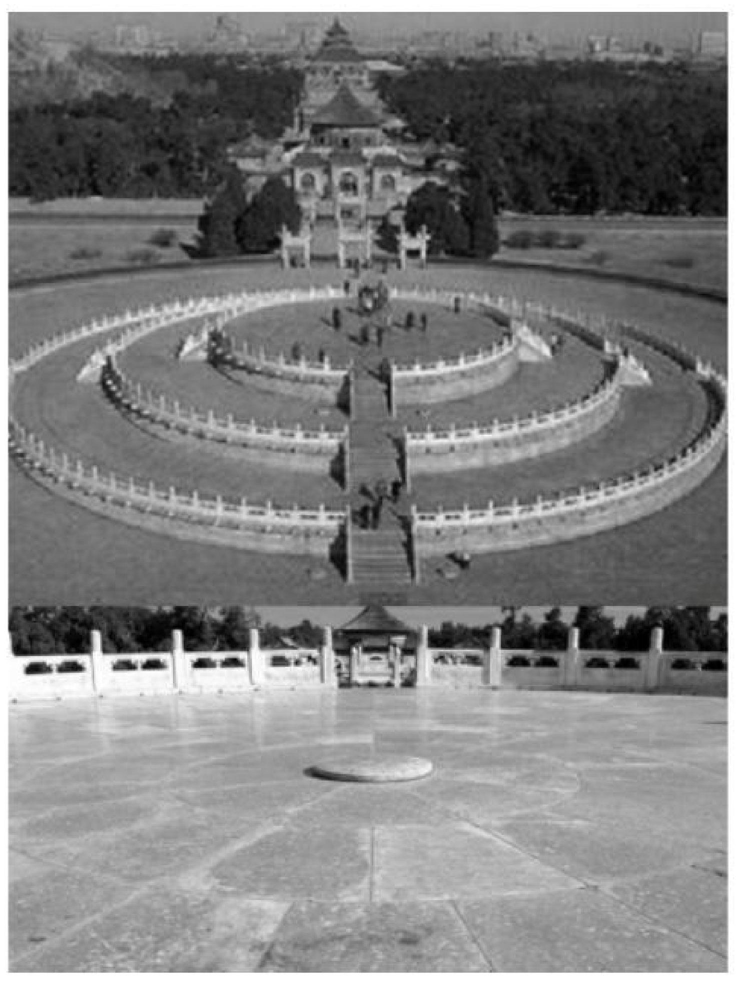
故 $S_{4n}=(S_{4n}-S_{3n})+(S_{3n}-S_{2n})+(S_{2n}-S_n)+S_n=4S_n+\dfrac{4\times 3}{2}d=10$.

答案：A

【反思】等差数列中，若涉及若干与 S_n 有关的条件，且下标都是某正整数的倍数，则可考虑用片段和性质.

【变式 2】（2020·新课标 II 卷）北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层. 上层中心有一块圆形石板（称为天心石）. 环绕天心石砌 9 块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加 9 块，下一层的第一环比上一层的最后一环多 9 块，向外每环依次也增加 9 块，已知每层环数相同，且下层比中层多 729 块. 则三层共有扇面形石板（不含天心石）（　　）

（A）3699 块　　（B）3474 块　　（C）3402 块　　（D）3339 块



解析：先把文字信息翻译成数列问题，建立数学模型，

由题意，可设上层从内到外每一环的扇形石板块数分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，中层分别为 $a_{m+1},a_{m+2},\cdots,a_{2m}$，下层分别为 $a_{2m+1},a_{2m+2},\cdots,a_{3m}$，则 $a_1,a_2,\cdots,a_{3m}$ 构成首项 $a_1=9$，公差 $d=9$ 的等差数列，设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，

注意到上、中、下三层扇形石板块数之和分别为 S_m， $S_{2m}-S_m$， $S_{3m}-S_{2m}$，故想到等差数列片段和性质，

因为$\{a_n\}$是等差数列，所以S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$构成公差为m^2d的等差数列，

因为下层比中层多 729 块，所以$(S_{3m}-S_{2m})-(S_{2m}-S_m)=m^2\times 9=729$，故$m=9$，

于是每层有 9 环，三层共有 27 环，代等差数列前 n 项和公式即可求得问题答案，

所以三层共有扇面形石板的块数为$S_{27}=27\times 9+\dfrac{27\times 26}{2}\times 9=3402$.

答案：C

【总结】等差数列问题除了用通项、前 n 项和公式处理外，若能灵活运用有关性质，可降低计算量.

类型Ⅱ：等比数列性质的应用

【例 5】等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_5a_6+a_4a_7=16$，则$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots+\log_2 a_{10}=$（　　）

（A）20　　（B）15　　（C）8　　（D）$3+\log_2 5$

解析：看到a_5a_6和a_4a_7，想到等比数列的下标和性质，

由题意，$a_5a_6+a_4a_7=2a_5a_6=16$，所以$a_5a_6=8$，故$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots+\log_2 a_{10}=\log_2(a_1a_2\cdots a_{10})$

$=\log_2[(a_1a_{10})\cdot(a_2a_9)\cdot(a_3a_8)\cdot(a_4a_7)\cdot(a_5a_6)]=\log_2(a_5a_6)^5=5\log_2(a_5a_6)=5\log_2 8=15$.

答案：B

【变式】在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_1a_5+2a_4a_6+a_5a_9=8$，则$a_3+a_7=$（　　）

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）4　　（D）$2\sqrt{2}$

解析：要算的是a_3+a_7，观察所给等式发现可用下标和性质把它们都化为a_3和a_7，

由题意，$a_1a_5+2a_4a_6+a_5a_9=a_3^2+2a_3a_7+a_7^2=(a_3+a_7)^2=8$，结合$\{a_n\}$各项均为正数可得$a_3+a_7=2\sqrt{2}$.

答案：D

【例 6】（2021 · 全国甲卷）记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若$S_2=4$，$S_4=6$，则$S_6=$（　　）

（A）7　　（B）8　　（C）9　　（D）10

解析：看到S_2，S_4，S_6，想到等比数列的片段和性质，

由题意，$\{a_n\}$为等比数列，且公比$q\neq -1$，否则$S_2=S_4=0$，与题设矛盾，

所以S_2，S_4-S_2，S_6-S_4成等比数列，故$(S_4-S_2)^2=S_2(S_6-S_4)$，将$S_2=4$和$S_4=6$代入可求得$S_6=7$.

答案：A

强化训练

类型Ⅰ：等差数列的性质应用

1.（2022 · 宁波模拟 · ★）已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均为等差数列，且$a_3+b_5=4$，$a_5+b_9=8$，则$a_4+b_7=$（　　）

（A）5　　（B）6　　（C）7　　（D）8

2．（2022 • 重庆模拟 • ★★）中国古代数学著作《九章算术》中有如下问题："今有金箠，长五尺，斩本一尺，重四斤，斩末一尺，重二斤. 问次一尺各重几何"？意思是："现有一根金锤，长五尺，一头粗一头细. 在粗的一端截下一尺，重四斤；在细的一端截下一尺，重二斤. 问依次每一尺各重几斤"？根据已知条件，若金锤由粗到细是均匀变化的，则中间三尺的重量为（　　）

（A）3 斤　　（B）6 斤　　（C）9 斤　　（D）12 斤

3．（2022 • 宿迁模拟 • ★★★）若两个等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为A_n，B_n，且$\frac{A_n}{B_n}=\frac{2n+1}{3n-2}$，则$\frac{a_5+a_{13}}{b_3+b_{15}}$的值为_____.

4．（2022 • 重庆模拟 • ★★）已知S_n是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若$S_3=15$，$S_9=75$，则$S_6=$（　　）

（A）40　（B）45　（C）50　（D）55

5．（★★★）等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$\frac{S_3}{S_6}=\frac{1}{4}$，则$\frac{S_{15}}{S_9}=$_____.

6．（2022 •海安模拟 •★★★）已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$S_{10}=110$，$S_{110}=10$，则$S_{120}=$（　　）

（A）-10　（B）-20　（C）-120　（D）-110

类型 II：等比数列的性质应用

7．（2022 • 绵阳模拟 • ★★）已知等比数列$\{a_n\}$满足$\log_2 a_2+\log_2 a_{11}=1$，且$a_5a_6a_8a_9=16$，则数列$\{a_n\}$的公比为（　　）

（A）2　（B）4　（C）±2　（D）±4

8．（2023 • 黑龙江鹤岗模拟 • ★★）各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_6^2+a_5a_9+a_8^2=25$，则a_1a_{13}的最大值为（　　）

（A）$\frac{25}{3}$　（B）$\frac{25}{4}$　（C）$\frac{25}{2}$　（D）5

9．（2022 • 江西模拟 • ★★）已知S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_4=6$，$S_8=18$，则$a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=$（　　）

（A）96　（B）162　（C）243　（D）486

10．（2023 • 新高考Ⅱ卷 • ★★★）记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_4=-5$，$S_6=21S_2$，则$S_8=$（　　）

（A）120　（B）85　（C）-85　（D）-120